

Пункт 3.2. Методичні рекомендації щодо викладання математики в умовах дистанційного навчання

Президент України Володимир Зеленський з метою забезпечення додержання конституційних гарантій з реалізації права на освіту, створення можливостей для рівного доступу українських школярів до сучасної та якісної математичної освіти, формування у них належного рівня математичної компетентності, ураховуючи результати міжнародного дослідження якості освіти PISA щодо математичної компетентності здобувачів базової середньої освіти в Україні, своїм указом №31/2020 від 30.01.2020р. “Про оголошення 2020/2021 навчального року Роком математичної освіти в Україні” постановив серед інших завдань забезпечення належної організації запровадження з 2021 року обов’язкового зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Кабінет Міністрів України у п.17 “Плану заходів щодо реалізації Року математичної освіти в Україні у 2020/2021 навчальному році” №630-р від 25.06.2020р. передбачив запровадження обов’язкової державної підсумкової атестації (у формі зовнішнього незалежного оцінювання) з математики для здобувачів повної загальної середньої освіти. Очікується, що учням/студентам/слухачам буде надана можливість справедливого, неупередженого, об’єктивного, незалежного, недискримінаційного та добросовісного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих незалежно від виду та форми здобуття освіти. Відповідно до поставлених завдань державного рівня виникла необхідність посилити роботу щодо викладання математики та якісної підготовки до ЗНО у закладах загальної середньої освіти України.

Під впливом глобалізаційних процесів особливого значення набуває впровадження інноваційних технологій навчання, які є ефективними для забезпечення сучасного рівня викладання математики і сприяють формуванню і розвитку математичної компетентності учнів. При цьому доцільно враховувати кращий досвід вітчизняних і міжнародних практик, вивчення та впровадження

досвіду держав, які демонструють високі показники з математичної компетентності за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA.

В умовах довготривалого карантину неодноразово вчителям потрібно було швидко реагувати на виклики сучасного світу, організовуючи процес навчання учнів у дистанційній формі.

Дистанційне навчання досліджували вчені Ст. Віллер, Дж. Андерсон, Т.Едвард, Р.Клінг, В.Биков, А.Андрєєв, В.Кухаренко, В.Лапінський, Н. Морзе та ін.

16 жовтня 2020 року набрало чинності нове Положення про дистанційну форму здобуття повної загальної середньої освіти, яке затверджене наказом МОН від 08 вересня 2020 року № 1115, зареєстрованим в Міністерстві юстиції України 28 вересня 2020 року за № 941/35224. Згідно цього Положення дистанційне навчання - організація з освітнього процесу (за дистанційною формою здобуття освіти або шляхом використання технологій дистанційного навчання в різних формах здобуття освіти) в умовах віддаленості один від одного його учасників та їх як правило опосередкованої взаємодії в освітньому середовищі, яке функціонує на базі сучасних освітніх, інформаційно-комунікаційних (цифрових) технологій.

Дані методичні рекомендації покликані надати методичну допомогу вчителям математики з організації дистанційного навчання, а також у підготовці школярів до ДПА і ЗНО.

Характерними для дистанційної форми навчання в першу чергу є гнучкість, яка передбачає зручний час, місце та темп роботи і технологічність, яка полягає у використанні нових досягнень у галузі інформаційних технологій.

Організація дистанційного навчання забезпечує можливість реалізувати право осіб на якісну та доступну освіту відповідно до їх здібностей, інтересів, потреб, мотивації, можливостей та досвіду, незалежно від віку, місця проживання чи перебування, стану здоров'я, інвалідності, соціального і

майнового стану, інших ознак і обставин, у тому числі тих, які об'єктивно унеможлиблюють відвідування закладів освіти.

Організація дистанційного навчання передбачає:

1. Здійснення процесу навчання відповідно до освітньої програми закладу освіти та забезпечення виконання суб'єктами дистанційного навчання державних стандартів освіти. У разі потреби дистанційне навчання може організовуватися за індивідуальним навчальним планом.
2. Використання конкретних інформаційно-телекомунікаційних систем (електронних освітніх платформ), комунікаційних онлайн сервісів та інструментів, за допомогою яких організовується освітній процес під час дистанційного навчання, що схвалюється педагогічною радою з метою забезпечення в закладі освіти єдиних підходів до створення електронного освітнього середовища.
3. Отримання навчальних матеріалів, спілкування між суб'єктами дистанційного навчання під час навчальних та корекційно-розвиткових занять, консультацій, що проводяться дистанційно, забезпечується передачею відео-, аудіо-, графічної та текстової інформації в синхронному або асинхронному режимі.

Асинхронний режим - взаємодія між суб'єктами дистанційного навчання, під час якої учасники взаємодіють між собою із затримкою у часі, застосовуючи при цьому інтерактивні освітні платформи, електронну пошту, форуми, соціальні мережі тощо.

Синхронний режим - взаємодія між суб'єктами дистанційного навчання, під час якої учасники одночасно перебувають в електронному освітньому середовищі або спілкуються за допомогою засобів аудіо-, відеоконференції.

4. Вибір засобів дистанційного навчання (хмарні сервіси, онлайн-платформи, навчальні середовища, онлайн-сервіси, віртуальні дошки,

системи динамічної математики, відеоуроки, інтерактивні вправи, освітні веб-ресурси).

5. Вибір технологій дистанційного навчання - комплексу освітніх технологій (технології розвивального, проєктного, змішаного, диференційованого, програмованого, модульного навчання тощо), а також інформаційно-комунікаційних (цифрових) технологій, що дають можливість реалізувати процес дистанційного навчання.
6. Організацію інтерактивної взаємодії учасників освітнього процесу (електронна пошта, форум, чат, відеоконференція, блог, тощо).
7. Забезпечення регулярної та змістовної взаємодії суб'єктів дистанційного навчання з використанням форм індивідуальної та колективної навчально-пізнавальної діяльності учнів, а також здійснення ними самоконтролю під час навчання.
8. Визначення і дотримання правил і дедлайнів дистанційного освітнього процесу, формату представлення учнями завдань.

Рекомендується для забезпечення організації освітнього процесу та виконання освітніх програм при дистанційному навчанні використовувати наступні засоби навчання.

З метою організації дистанційного навчання:

1. Microsoft Teams <https://teams.microsoft.com/start>
2. Google Classroom <https://classroom.google.com>
3. Class Dojo <https://www.classdojo.com/>
4. GIOS <https://gioschool.com/>
5. Мій Клас <https://miyklass.com.ua/info/uciteliam>
6. Edmodo <https://new.edmodo.com>

З метою організації простору навчальної взаємодії:

1. Padlet <https://padlet.com>
2. Lino It <https://en.linoit.com/>
3. MindMeister <https://www.mindmeister.com/>
4. Mindomo <https://mindomo.com/>

З метою дистанційної перевірки знань, створення навчальних тестів:

1. «На урок» <https://naurok.com.ua/test/create>
2. LearningApps <https://learningapps.org/>
3. Kahoot! <https://kahoot.com>
4. Matific <https://www.matific.com/ua/uk/home>
5. Google форми <https://www.google.com.ua>

З метою організації відеоконференцій, проведення відеоуроків:

1. Zoom <https://zoom.ua/>
2. Google Hangouts <https://hangouts.google.com/>
3. Skype Meet Now <https://www.skype.com/uk/free-conference-call/>
4. Cisco Webex <https://www.cisco.com/>

З метою підготовки до ЗНО, систематизації теоретичного матеріалу:

1. EdEra <https://www.ed-era.com/>
2. iLearn <https://ilearn.org.ua/>
3. Prometheus <https://prometheus.org.ua>
4. Khan Academy <https://uk.khanacademy.org/>

5. Be smart <https://besmart.eduget.com>

З метою організації дослідницької діяльності:

1. GeoGebra, GeoGebra 5.0 <https://www.geogebra.org>
2. Advanced Grapher 2.2 <https://www.alentum.com/agrapher>
3. Desmos <https://www.desmos.com/>

Електронні підручники:

<https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/pidruchniki/elektronni-pidruchniki/>.

Відповідно до поставлених завдань державного рівня виникла необхідність посилити роботу щодо викладання математики та якісної підготовки до ДПА і ЗНО у закладах загальної середньої освіти України.

З метою реалізації цієї програми, для надання методичної допомоги вчителям математики і учням у підготовці до ДПА і ЗНО пропонуються методичні рекомендації щодо розв'язування задач, які пов'язані з властивостями функцій та їх графіків, стереометричними завданнями і задачами з параметрами.

Саме з цими розділами пов'язані завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю, які пропонувалися на ЗНО минулих років і наявні в демонстраційному варіанті рівня стандарту та профільного рівня на 2021 рік.

У методичних рекомендаціях пропонуються підходи і побудовані на них алгоритми, які покликані полегшити пошук і розв'язання найважчих завдань ЗНО та забезпечити повноту розв'язання завдань такого рівня. Вони носять універсальний характер. Тому придатні до застосування при розв'язуванні широкого кола завдань.

Дані методичні поради легко запам'ятати. Їх об'єм, кількість і формулювання є невеликими і доступними. Вони потрібні на перших етапах розв'язання завдань, покликані підказувати напрям пошуку і міркувань розв'язання задач або доведення тверджень, які на перший погляд здаються недоступними і складними.

1. Властивості функцій та побудова їх графіків

Як правило це лінійні і квадратичні функції, дробово-раціональні функції із лінійним знаменником, степеневі, показникові, ірраціональні, логарифмічні і тригонометричні функції, а також функції, які містять модулі.

У завданнях, пов'язаних з функціями, вимагається вміти знаходити область допустимих значень (ОДЗ), корені квадратних рівнянь, розкласти на множники квадратні тричлени, застосовувати метод інтервалів, знаходити точки перетину графіків функцій з осями координат, будувати графіки функцій, визначати за графіком області значень, знаходити похідні, первісні, найбільші і найменші значення функцій на відрізку, обчислювати площі фігур, які обмежені графіками функцій і осями координат, записувати рівняння дотичних і знаходити абсциси їх точок перетину з осями координат.

Для розв'язання завдань пов'язаних з властивостями функцій потрібно вміти виконувати дії:

1. Знайти ОДЗ.
2. Прирівняти праву частину функції до нуля, знайти корені утворених рівнянь, розкласти на множники і розставити знаки функції.
3. Побудувати графік функції і за її графіком визначити найбільше і найменше значення та область значення функції.
4. Скористатися тим, що графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат у точці $(0, f(0))$, а вісь абсцис у точці $(x_0, 0)$, де x_0 знаходиться з рівняння $f(x_0) = 0$.

Абсциси точок перетину графіків функцій f і g знаходяться з рівності $f(x) = g(x)$.

5. Знайти площу фігури обмежену графіками функцій за формулою Ньютона –Лейбніца.
6. Обчислити значення функції і похідної функції в заданій точці і підставити в рівняння дотичної.
7. Розкрити модуль за правилом розкриття модуля і розглянути пов'язані з ним випадки.
8. Для побудови графіків функцій скористатися правилами перетворення графіків функцій. Зокрема, можна використати підхід, який полягає в тому, щоб, знаючи графік функцій $y = f(x)$, схематично побудувати графіки функцій

$$y = f(-x), y = -f(x), y = f(|x|), y = |f(x)|, y = f(x + a) + b, y = \frac{1}{f(x)}.$$

Більш конкретно, графік функції:

1. $y = -f(x)$ утворюється з графіка функції $y = f(x)$ симетрією відносно осі OY .
2. $y = -f(x)$ утвориться з графіка функції $y = f(x)$ симетрією відносно осі OX .
3. $y = f(|x|)$ утвориться з графіка функції $y = f(x)$ симетрією його правої частини на ліву частину відносно осі OY . При цьому права частина графіка функції $y = f(x)$ не змінюється.
4. $y = |f(x)|$ утвориться з графіка функції $y = f(x)$ симетрією нижньої частини графіка на верхню частину відносно осі OX . При цьому верхня частина графіка функції $y = f(x)$ не змінюється.
5. $y = f(x + a) + b$ є графіком функції $y_1 = f(x_1)$ у системі координат $X_1O_1Y_1$ з початком координат у точці $O_1(-a; b)$. Система координат $X_1O_1Y_1$ утворюється з системи координат XOY паралельним перенесенням.
6. $y = \frac{1}{f(x)}$ утворюється з графіка функції знаменника $y = f(x)$, якщо через нулі і деякі точки невизначеності цього графіка провести вертикальні прямі і визначити поведінку графіка функції $y = \frac{1}{f(x)}$ при прямуванні змінної x до

нулів і точок невизначеності функції $y = f(x)$ та $\pm\infty$, користуючись “мнемонічним” правилом $\frac{1}{\pm\infty} = \pm 0$ і $\frac{1}{\pm 0} = \pm\infty$.

Для побудови графіка функції, що є суперпозицією деяких функцій 1 - 6 доцільно розкласти функцію в ланцюжок функцій вигляду 1-6 і побудувати відповідний ланцюжок їх графіків.

2. Елементи стереометрії

У стереометричних завданнях задаються або потрібно вміти знаходити кути між прямими і площинами або кути між площинами.

Кут між прямою і площиною визначається як кут між похилою і її проекцією на площину, а кут між площинами як кут між двома перпендикулярами, проведеними у площинах з однієї точки лінії перетину площин. Тому в таких задачах рекомендується:

для знаходження кута між похилою і площиною

1. Визначити похилу і її проекцію на площину.
2. Вказати кут між похилою і її проекцією.

для знаходження кута між площинами

1. Знайти лінію перетину площин і вибрати на ній зручну точку.
2. Провести із вибраної точки або опустити на неї перпендикуляри у заданих площинах.
3. Визначити кут між перпендикулярами.

Якщо кути між прямою і площиною або між площинами є прямим, то слід використовувати критерії перпендикулярності прямої і площини та площин:

1. Пряма перпендикулярна до площини тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до двох прямих площини, які між собою перетинаються.
2. Дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли одна з них містить пряму, яка перпендикулярна до іншої площини.

При обґрунтуванні відстані від точки до площини слід скористатися тим, що відстанню від точки до площини є довжина перпендикуляра, проведеного з точки на площину.

При відшуванні кута між площинами часто застосовується теорема про три перпендикуляри. Для цього доцільно:

1. Визначити площину проектування, як площину, що містить основу перпендикуляра, опущеного на неї.
2. Зафіксувати площину проектування, перпендикуляр опущений на неї і точку перпендикуляра, яка не належить вибраній площині.
3. Вибрати пряму у площині проектування і опустити на неї перпендикуляр із вибраної точки або з основи перпендикуляра.
4. Вказати похилу до площини і її проекцію у площині проектування.
5. Скористатися теоремою про три перпендикуляри, яка стверджує, що пряма площини проектування, яка перпендикулярна до похилої або її проекції є перпендикулярною до них обох.

У завданнях на перерізи тіл площинами вимагається вміти будувати перерізи, обґрунтовувати їх вид, визначати площу або периметр утвореного перерізу.

В цих завданнях слід враховувати, що:

1. Якщо дві точки належать перерізу, то і пряма яка їх містить належить перерізу.
2. Лінії перетину двох паралельних площин деякою площиною між собою паралельні.

Для знаходження числових значень доцільно:

1. Використовувати тригонометричні значення у прямокутних трикутниках або теорему Піфагора.
2. Користуватися формулами об'ємів, площ поверхонь тіл та формулами площ і довжин контурів плоских фігур.

3. Про задачі з параметрами

Найважчими завданнями ЗНО є задачі з параметрами у рівняннях або нерівностях, а також у системах рівнянь або нерівностей, одне з яких містить параметр, а друге без параметра.

Таким чином, завдання з параметрами зводяться до знаходження умов на параметр при яких корені рівняння або нерівності систем рівнянь або нерівностей існують. Значення параметра при якому корені відсутні, належать проміжку при якому рівняння або нерівності, система рівнянь або нерівностей не мають розв'язків.

Для розв'язання таких завдань доцільно:

1. Вказати ОДЗ змінної величини і параметра.
2. Виразити змінну величину через параметр.
3. З'ясувати при яких значеннях параметра змінна величина задовольняє або не задовольняє ОДЗ.
4. Розглянути всі можливі значення параметра.
5. Вказати відповідь при кожному значенні параметра змінюючи його від мінус до плюс нескінченності.

Проілюструємо застосування методичних рекомендацій щодо розв'язування типових задач з параметрами. В них відображено ідейний бік задач з параметрами, які пропонувалися на ЗНО у 2016-2020 роках і пропонуються у демонстраційному варіанті ЗНО, яке відбудеться у 2021 році.

4. Типові приклади розв'язування рівнянь і нерівностей залежно від параметра a

До таких прикладів відносяться дробово-раціональні рівняння і нерівності, чисельники і знаменники яких розкладені в добуток лінійних множників. Найпростіші з них розглянуті у прикладах 1 – 4.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x+a} = 0$ при всіх значеннях параметра a .

Розв'язання.

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$

Значення $x = -1$ є коренем рівняння, якщо $-1 \neq -a$, тобто при $a \neq 1$.

При $a = 1$ рівняння коренів не має.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = -1$.

Якщо $a = 1$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{a(x+1)}{x+a} = 0$ при всіх значеннях параметра a .

Розв'язання.

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a \neq 0$, то $\frac{x+1}{x+a} = 0$. Як і в прикладі 1 $x = -1$ є розв'язком рівняння при $a \neq 1$, а при $a = 1$ рівняння коренів не має.

Якщо $a = 0$, то x будь-яке число, яке відмінне від 0.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = -1$.

Якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $a = 1$, то рівняння коренів не має.

Дробово-раціональні нерівності, чисельники і знаменники яких розкладені в добуток лінійних множників, розв'язуються методом інтервалів.

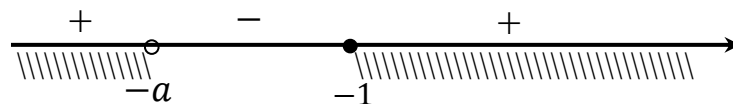
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\frac{x+1}{x+a} \geq 0$ при всіх значеннях параметра a .

Розв'язання.

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

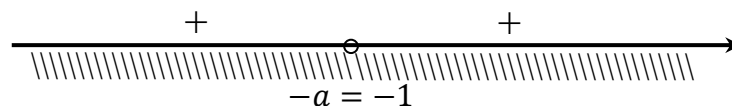
Можуть трапитися три випадки розташування параметра a відносно -1

1. $-a < -1$, тобто $a > 1$



Тоді $x \in (-\infty; -a) \cup [-1; +\infty)$

2. $-a = -1$, тобто $a = 1$



Тоді $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

3. $-a > -1$, тобто $a < 1$



Тоді $x \in (-\infty; -1] \cup (-a; +\infty)$.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 1)$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -a) \cup [-1; +\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{a(x+1)}{x+a} \geq 0$ при всіх значеннях параметра a .

Розв'язання.

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то $\frac{x+1}{x+a} \leq 0$. В такому разі $-a > 0 > -1$. Тоді $x \in [-1; -a)$.

Якщо $a = 0$, то x будь-яке число, яке відмінне від 0.

Якщо $a > 0$, то $\frac{x+1}{x+a} \geq 0$ і можна скористатись розв'язком прикладу 3.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in [-1; -a)$.

Якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -a) \cup [-1; +\infty)$.